Paradojas

Carlos Pino León

1.0 ENSAYO SOBRE PARADOJAS LÓGICAS

1.1 Que es una paradoja exactamente?

Muchos autores discrepan sobre la definición de paradoja, yo no seré la excepción, avanzo al lector con criterio. Pero quizá la forma más adecuada de definir una paradoja es como aquello que es y no es ya que en si es una definición un tanto paradójica. Sin embargo este galimatías no nos brinda ninguna opción de diseccionar tan peculiares frases o ideas que en mas de una ocasión han sido las responsables de el avance de las ciencias o las matemáticas.

Por paradoja solemos entender cosas que son tales pero también alguna que no lo es tanto. Una paradoja es una construcción lingüística de la que no somos capaces de afirmar ni su veracidad ni su falsedad ya sea porque su veracidad implica su falsedad o porque su veracidad implica su veracidad de la misma forma que su falsedad implica su falsedad. Veremos mas adelante que quiere decir exactamente este galimatías que a pesar de lo que pueda pensar el lector tiene sentido. Así por ejemplo entenderemos en este ensayo como paradoja la frase "*este enunciado es falso*" ya que si *este enunciado* se refiere al propio enunciado "*este enunciado es falso*" ello implica que si el enunciado es verdadero el enunciado es falso mientras que si es falso es verdadero. Esta es la forma mas simple de paradoja incompatible. Sin embargo no serán paradojas tales enunciados como la nombrada *paradoja de Zenón*[1] o *las paradojas de inversión estadística*[2] ya que ellas realmente encontraron su solución en el avance de las matemáticas. Así por ejemplo la paradoja de Zenón no es tal si tenemos claro el concepto de límite de serie y la paradoja de inversión estadística es un mero juego de probabilidades (juego muy usado en política por cierto).

1.2 Tipos de Paradojas

Básicamente con nuestra definición de paradoja podemos separar nuestros enunciados lógicos en tres categorías análogas a un sistema de ecuaciones:

-*Proposiciones compatibles determinadas*: que son aquellas en las que se puede demostrar su falsedad o verdad.

-*Proposiciones compatibles indeterminadas*: que son aquellas en las que se puede demostrar su verdad y su falsedad.

-*Proposiciones incompatibles*: que son aquellas en las que no se puede demostrar ni su veracidad ni su falsedad.

Para poder determinar rigurosamente a que tipo de paradoja pertenece aquella que tengamos entre manos es necesario tener algunos conocimientos básicos de lógica proposicional y lógica de clases. Además necesitaremos trabajar también con el volumen conceptual asociado a una palabra que designaremos como &a . Sus tres dimensiones serán:

-La palabra sintáctica (@a): o la relación que tiene la palabra con aquellas que le rodean
-La palabra semántica (*a) : o el significado propio de la palabra.
-La palabra pragmática ($a): o la relación entre emisor y receptor que implica la palabra.

Estas relaciones no son completamente independientes. Ya que la palabra pragmática depende de la palabra semántica y de la sintáctica, la palabra semántica depende de la semántica y la sintáctica solo depende de ella misma. En nuestro volumen podemos representar esquemáticamente esto como sigue:

$a => @a	@a ≠> $a
$a => *a	*a ≠> @a
@a => *a	*a ≠> $a

También será necesario definir el valor booleano de una palabra (a^B) así como el de una proposición. No todas las palabras tienen un valor booleano por si mismas. Un valor booleano es poder atribuir a la palabra los números 1 (verdad) o 0 (falso) . Así por ejemplo *blanco, mojado, seco*... no tendrán ningún valor booleano asociado en principio. Sin embargo *verdad* tendrá inmediatamente asociado el valor 1 y *enunciado, frase, oración, lo que el dijo...* deben tener valor booleano aun sin determinar. Los verbos funcionaran como conectores ya sea de inclusión (◄, ser, pertencer, parece...etc) o como vinculación (→, coge, trae, duerme...).

1.3 Ejemplos de paradojas y su análisis

Analicemos como ejemplos la paradojas del tipo:
"este enunciado es falso"

Esta paradoja, llamada inicialmente *paradoja del mentiroso* es la mas vieja e importante de las paradojas lógicas. Se le atribuye al filósofo griego Eubúlides y en su forma original se escribía como la pregunta *"¿Mientes cuando dices que mientes?"*. Si la respuesta era *Sí miento* entonces no mentías porque estabas diciendo que mentías pero si dices que *No miento* entonces o no mientes y dices completamente la verdad o mientes y entonces mientes cuando responder que no mientes de forma que resulta coherente pero indemostrable. El *Sí miento* es equivalente a la expresión que hemos plantado inicialmente: *"este enunciado es falso"*

sean:
este enunciado: &a
es : ◄
falso: &b, $b^B = 0$
así pues podemos escribir

@a = @(&a ◄ &b) lo cual se puede traducir como "el significado de este enunciado es el significado de este enunciado es falso".

Viendo el enunciado de esta forma es fácil darse cuenta del error que supone caer en el bucle, como el enunciado es falso debe ser verdadero pero como es verdadero debe ser falso... ello es equivalente a la expresión:

a = (&(&(&(&.....(&a ◄ &b) ◄&b) ◄&b).... ◄&b)

La forma correcta de resolver esta paradoja consiste en preguntarnos por el valor booleano de la expresión y saber interpretar lo que se nos expone

$a^B = (\&a \blacktriangleleft \&b)^B$

La forma que tiene el valor booleano de actuar sobre los elementos del interior del parentesis es preguntar su valor a cada elemento incluido el conector ◄. De hecho el valor booleano del paréntesis será el valor booleano del conector. Así:

$a^B = (a^B \blacktriangleleft^B b^B) = a^B \blacktriangleleft^B 0$

el último término de la igualdad nos dice que &a es falso o dicho de otra manera que si a es 1 entonces $\blacktriangleleft^B$ será 0 y viceversa. Haciendo uso de la lógica proposicional esto se puede escribir como $a^B \blacktriangleleft^B 0 = \neg a^B$ donde ¬ es el negador que invierte el valor booleano de nuestra variable. Asi pues llegamos finalmente a la expresión:

$a^B = \neg a^B$

o lo que es lo mismo que el enunciado es cierto si es falso y es falso si es cierto. Dentro de una lógica bivaluada esta expresión no tiene sentido pero intentar resolver la paradoja usando lógicas multivaluadas no creo que sea correcto ya que ellas de hecho carecen de un sentido claro y en el fondo no hacen mas que camuflar la incongruencia de la paradoja en la confusión del método. Este resultado nos muestra que esta paradoja es del tipo incompatible ya que si $a^B = 1$ entonces $1 = 0$ lo cual no es posible.

Por el contrario analicemos ahora la segunda respuesta de la paradoja inicial: *No miento*. Esta respuesta es equivalente a la proposición *"este enunciado es verdadero"* Procediendo de la misma forma que antes:

sean:
este enunciado: &a

es : ◄
verdadero: &b, $b^B = 1$

en este caso tras ordenar nuestros conceptos llegamos a:

$a^B = (a^B ◄^B b^B) = a^B ◄^B 1$

Ahora tenemos entre nuestras manos la expresión $a^B ◄^B 1$. Si nos detenemos a analizarla con cuidado vemos que es equivalente a decir que el &a es verdadero por lo que el valor booleno del conector será verdadero si a es verdadera y falso si a es falso. Así pues $a^B ◄^B 1 = a^B$ de donde:

$a^B = a^B$

Este tipo de resultado es el que asociaremos a la clase de paradojas indeterminadas ya que no podemos asegurar que el resultado sea cierto o falso pero si que es alguno de los dos (1 = 1 o 0 = 0).

Analicemos ahora la un poco mas compleja llamada paradoja de los abogados. Esta consiste en lo siguiente:
"Un profesor de derecho Protágoras enseña a su alumno Euatle y decide que este no le pague hasta que no gane su primer caso. Pero Euatle cuando termina no se dedica a la abogacía y Protágoras le demanda. Los dos se defienden a si mismo y aquí surge la paradoja:
Protagoras afirma que si gana el juicio cobrara porque así lo dictaminará el juez mientras que si pierde el juicio cobrará porque Euatle habrá ganado su primer juicio. Así pues en cualquier caso cobrará
Pero Euatle afirma que si gana el juicio no tiene porque pagar porque así lo dictaminará el juez mientras que si pierde el juicio no tiene que pagar porque no ha ganado aun su primer caso.
¿Qué puede hacer el pobre juez que se vea envuelto en este galimatías?"

La solución a este problema seguramente acabaría siendo injusta para una de las dos partes, como demostraremos el juez no tiene ninguna otra opción porque sorprendentemente los dos tienen razón. Esta paradoja que se sitúa históricamente en tiempo de los filósofos estoicos se puede simplificar en el siguiente sistema de proposiciones:

Euatle dice: *"Lo que dice Protágoras es falso"*
Protágoras dice: *"Lo que dice Euatle es falso"*

Por una banda si lo que dice Euatle es cierto entonces Protágoras miente y así lo que dice Euatle es cierto pero por otra banda si lo que dice Protágoras es cierto entonces Euatle miente y así lo que dice Protágoras es cierto. Ambos argumentos parecen lógicos pero sin embargo ambos conducen a respuestas diferentes. Procedamos a su análisis como en la paradoja anterior:

Sean:
Lo que dice Protágoras: &a
Lo que dice Euatle: &b
Es: ◄
Falso: &c, $c^B = 0$

Nuestro sistema se puede resumir en el siguiente:

@a =@(&b ◄ &c)
@b =@(&a ◄ &c)

Como en el caso anterior para no caer en las falacias típicas, llámense bucles de las paradojas, debemos analizar sus valores boléanos:

$a^B = (b^B$ ◄^{B} 0)
$b^B = (a^B$ ◄^{B} 0)

Como antes las expresiones (b^B ◄^{B} 0) y (a^B ◄^{B} 0) son equivalentes a escribir $\neg\, b^B$ y $\neg\, a^B$ respectivamente con lo nuestro sistema queda reducido a una expresión del tipo:

$a^B = \neg\, b^B$
$b^B = \neg\, a^B$

Que es una sencillo sistema de ecuaciones que podemos resolver arbitrariamente usando la doble negación o que $\neg\neg\, a^B = a^{\,B}$:

$a^B = a^B$
$b^B = b^B$

Si analizásemos de la misma forma:

Protágoras dice: "*lo que dice Euatle es cierto*"
Euatle dice: *"lo que dice Protágoras es cierto"*

Llegaríamos al mismo resultado, obtendríamos una paradoja indeterminada (PID). Para obtener paradojas incompatibles en el caso de dos interlocutores (incógnitas) tendríamos que tener estructuras del tipo:

Protágoras dice: "*lo que dice Euatle es cierto*"
Euatle dice: *"lo que dice Protágoras es falso"*

En ese caso llamemos &c_1 a cierto y &c_2 a falso obtendremos finalmente un resultado del tipo:

$a^B = \neg b^B$
$b^B = a^B$ => $a^B = \neg a^B$

El análisis de enunciados mas complejos, llamémosles de tres variables, del tipo:

Carlos dice:*"Aarón es un mentiroso"*
Sergio dice:*"Carlos dice la verdad"*
Aarón dice:"*Sergio dice la verdad"*

Nos descubre que si un sistema es paradójico indeterminado (PID) o paradójico incompatible (PIC) sólo depende cuando tiene esta estructura de cómo trabaja la doble negación. Así siguiendo este esquema podemos establecer un número. Al que llamaremos número de estado que nos determina si se trata de un sistema PID o PIC.

Sea *n* el número de variables y *s* la suma de los valores boléanos de las palabras verdad o mentira ($\Sigma\, c_i^B$). Entonces:

$\alpha = (1+ (-1)^{(n+s)})/2$ $\alpha = 1 \Rightarrow$ PID $\alpha = 0 \Rightarrow$ PIC

Comprobemos esta fórmula por ejemplo para el caso de 3 variables puesto anteriormente, tenemos los valores de mentira (0), verdad (1) y verdad (1) así pues s = 2 y n=3 lo que produce α = 0 y por lo tanto estamos en un PIC lo cual es correcto porque si Aarón dice la verdad entonces Sergio dice la verdad pero entonces Carlos dice la verdad por lo que Aarón no puede decir la verdad.

1.4 Composición de sistemas paradójicos.

Imaginemos que a un sistema paradójico que sumamos una serie de enunciados relacionados o sin relacionar. ¿Existe alguna forma de resolverlos simplemente conociendo sin se trata de PID o PIC con anterioridad a la suma? La respuesta es si, como en toda composición de enunciados lo único que tenemos que hacer es usar el conjuntor ^ y aplicarlo como funciona en la lógica proposicional utilizando los valores de α:

PIC ^ PIC = PIC	0 ^ 0 = 0
PIC ^ PID = PIC	0 ^ 1 = 0
PID ^ PIC = PIC	1 ^ 0 = 0
PID ^ PID = PID	1 ^ 1 = 1.

Así si tenemos el enunciado:

Sergio dice: *"Aarón es un mentiroso"*
Carlos dice: *"Sergio dice la verdad"*
Aarón dice: *"Los dos son unos mentirosos"*

Es análogo a la suma de sistemas:

Sergio dice: *"Aarón es un mentiroso"*
Carlos dice: *"Sergio dice la verdad"*
Aarón dice: *"Carlos es un mentiroso"*

Sergio dice: *"Aarón es un mentiroso"*
Carlos dice: *"Sergio dice la verdad"*
Aarón dice: *"Sergio es un mentiroso"*

Puesto que son dos $\alpha = 1$ PID y PID da PID => nuestro sistema es coherente para todas las partes pero como paradoja somos incapaces de decir quien tiene la razón.

1.5. Interpretación de los sistemas paradójicos

¿Por qué resultan tan chocantes las paradojas cuando tienen un parecido tan evidente con la matemática simple? Nadie se sorprende cuando un sistema de ecuaciones de incompatible o indeterminado, ello tiene una interpretación geométrica completamente conocida relacionada con el paralelismo de los planos y con sus intersecciones o sus no intersecciones. Entonces ¿dónde radica la "magia" de las paradojas? El lector me deberá perdonar pues introduje en el 1.2 las definiciones de los diferentes aspectos de la palabra un poco "por la manga" que ahora justificare. Hasta ahora sólo hemos usado los símbolos @a, &a y a^B. Ello se refiere a la conexión sintáctica entre las palabras, a la palabra desnuda en si y a su posible valor cierto o falso. Como mencionamos en 1.2 podemos trabajar sólo con la sintáctica y eso es lo que hemos estado haciendo. Lo sorprendente de las paradojas lógicas es la aplicación de la semántica, cosa que en matemática no podemos hacer. Los símbolos matemáticos 2, 3 +, d/dx implican una serie de relaciones y en caso de poseer semántica esta es muy débil. Por ejemplo 2 tiene un significado, es un par de... de algo. El dos como elemento semántico tiene muy poco valor, es una palabra muy general con pocos significados vinculados. En las paradojas encontramos que sus elementos si suelen tener un importante valor semántico, pero ¿qué ocurre con este?.

En este punto debemos plantearnos que nos dice una paradoja indeterminada o una paradoja incompatible. La PID nos da mas de un mensaje todos ellos posibles. Así pues tenemos un exceso de información que estará relacionado con el número de variables. Todas ellas tendrán una versión de los hechos completamente coherente. Así la paradoja en caso de PID residirá en una sobre información. Mientras tanto en la PIC lo que tendremos es que poseemos varios mensajes contradictorios lo que produce que el enunciado global no tenga sentido. Así podríamos decir que la presencia de una PIC produce que los enunciado pierdan su significado. Podemos resumir lo aquí expuesto en la siguiente fórmula:

$$*a = n \cdot \alpha \cdot *a$$

de esta forma si estamos en un sistema PID nuestra información se multiplicará por el número de variables mientras que en un sistema PIC nuestra información desaparecerá lo que querrá decir que el enunciado global carece de significado.

2.0 PARADOJAS DEL TIEMPO

2.1. Introducción

Para el lector no iniciado en relatividad especial explicaré brevemente y de modo muy intuitivo en que consiste. Básicamente Einstein dijo que dos sistemas inerciales (sistemas que se mueven a velocidad constante o permanecen en reposo) transforman uno respecto del otro no solo en el espacio si no también en el tiempo. Si yo me encuentro quieto y veo pasar ante mi un coche a una velocidad cercana a la de la luz con un reloj en su interior veré que el reloj del interior del coche parece ir más lento, se atrasará respecto al mío. De igual forma el mismo coche quieto parecerá ser más largo que en movimiento. La forma más rigurosa de deducir esto surge de la conservación de los intervalos. En tres dimensiones si giramos una barra de una determinada longitud en cualquier dirección esta se seguirá conservando, según Einstein si pensamos en cuatro dimensiones con la cuarta dimensión compleja e igual al tiempo (lo que se llama un espacio de Minkowsky) el intervalo también se debe conservar. Todas estos malabarismos matemáticos surgieron debido al experimento de Michelson Morley que demostró que la velocidad de la luz era una constante desde cualquier sistema de referencia inercial o dicho de otra manera que independientemente de la velocidad de la fuente siempre veremos que un rayo de luz emitido por la susodicha tiene una velocidad de $c = 2{,}998x10^8$ m/s. Lo que realmente choca con la realidad a la que estamos acostumbrados es la indistiguibilidad de los sistemas inerciales. Volvamos al ejemplo del coche. Alguien que este en el coche moviéndose a una velocidad cercana a la de la luz, además de infringir el máximo de velocidad permitido en las carreteras españolas, tendrá la impresión de estar en reposo y que es el hombre del exterior el que se mueve en dirección contraria a una velocidad cercana a la de la luz. Entonces según el hombre del interior del coche, el reloj del hombre que esta fuera del coche se atrasará!! La solución de esta aparente paradoja pasa una vez más por las matemáticas ya que los sistemas de referencia del hombre del coche y del que esta en el exterior son diferentes y entonces no tiene sentido comparar tiempos. Es semejante a preguntar si una bala de cañón sigue un movimiento rectilíneo o parabólico según se lo preguntemos al artillero que disparó la bala o a algún barón de Monchausen subido en ella.

2.2. Paradoja de las gemelas

Supongamos que tenemos ahora dos hermosas gemelas castañas Loreto y Montse y que Loreto decide ir a dar una vuelta por el universo en un cohete a una velocidad cercana a la de la luz. Para Montse que se queda en reposo en la tierra el tiempo en el cohete transcurrirá más y más lento por lo que cuando Loreto vuelva Montse será una vieja de pelo canoso mientras que Loreto seguirá conservando su rizada cabellera castaña. Pero desde el punto de vista egocéntrico de Loreto la cosa irá al revés. Será Montse la que dará una vuelta al universo montada en la Tierra mientras ella permanece en el único artilugio inmóvil del universo, su nave. Desde el punto de vista de Loreto cuando llegue a la tierra ella será una vieja y Montse que ha viajado a toda leche seguirá conservando su rizada cabellera castaña. ¿Dónde esta el fallo de nuestro razonamiento? ¿O acaso la teoría de la relatividad hace aguas? Si lo segundo fuera cierto el 99 % de los físicos teóricos actuales se quedarían en paro y al 1 % restante abría que liberarlo del frenopático. En efecto los segundo no ocurre, lo único que pasa es que no hemos tenido en cuenta que para regresar a la tierra la nave debe girar y hasta ahora sólo hemos hablado de movimientos inerciales. ¿Qué pasa si la nave frena bruscamente y regresa o si describe un gigantesco circulo? Entonces entran en juego las aceleraciones. A diferencia de los sistemas inerciales los sistemas acelerados si son distinguibles. Así Montse en la tierra será una mujer feliz mientras Loreto en su nave notará en algún momento como es aplastada contra el asiento por una misteriosa fuerza (las llamadas fuerzas ficticias). Es esta aceleración la que hace que el tiempo en la tierra pase a toda pastilla y que cuando Loreto vuelva encuentre en efecto en el rostro de Montse que de aquí a unos años le saldrán patas de gallo.

2.3. Paradojas de viajes en el tiempo

Otro día.