

# SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS



## Concepto.

La sincronización del caos se refiere a procesos donde dos ( o más) sistemas caóticos (equivalentes o no equivalentes entre ellos) se ajustan para dar unas propiedades de movimiento común debido al acoplamiento o a una fuerza (periódica o ruidosa).

## Contenidos.

1. Introducción.....	2
1.1 Concepto de sincronización de caos.....	2
1.2 Tipos de estados sincronizados.....	2
2. Sincronización de sistemas idénticos.....	4
2.1 Sincronización completa.....	4
2.2 Método Pecora y Carroll (PC).....	4
2.3 Método Active-passive decomposition (APD).....	8
2.4 Sincronización completa mediante acoplamiento bidireccional....	9
3. Sincronización de sistemas no idénticos.....	10
3.1 Sincronización de fase de sistemas caóticos.....	10
3.1.1 Sincronización de osciladores periódicos.....	10
3.1.2 Sincronización de fase de osciladores caóticos acoplados..	12
3.2 Sincronización de fase imperfecta.....	13
3.3 Sincronización de retardo de sistemas caóticos.....	15
3.4 Sincronización de retardo intermitente.....	17
3.5 Sincronización generalizada.....	18
4. Experimentos de sincronización de caos.....	22
4.1 Fenómenos de sincronización en experimentos de laboratorio.....	22
4.2 Fenómenos de sincronización en sistemas naturales.....	22
Referencias.....	22

“Los físicos se complacen en pensar que basta decir:  
Estas son las condiciones iniciales. Pero ¿qué sucede a continuación?”  
Richard P. Feynman

## 1. Introducción.

### 1.1 Concepto de sincronización de caos.

Uno de los rasgos más sobresalientes de los sistemas caóticos es su dependencia con las condiciones iniciales del sistema, que hace que la más mínima diferencia en la descripción del estado del sistema provoquen cambios que hacen distintos a sistemas complejos que originalmente, eran tan parecidos como se les quiera suponer.

La idea que subyace bajo el fenómeno de sincronización es que dos sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, al acoplarse de algún modo, finalmente siguen una trayectoria común.

La sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de los dos sistemas cambia su trayectoria a la seguida por el otro sistema o bien a una nueva trayectoria común a ambos sistemas.

La primera cosa a destacar es que hay una gran diferencia en los procesos a la consecución de estados sincronizados, dependiendo del tipo de acoplamiento.

Una primera división de los tipos de acoplamiento es:

- *Acoplamiento unidireccional.*  
Un sistema se subdivide en dos subsistemas, uno de ellos envuelve y conduce al otro, siendo la respuesta del sistema esclavizado seguir la dinámica del sistema conductor.  
Dicho de otro modo, cuando la evolución de uno de los dos sistemas no es alterada por el acoplamiento la configuración resultante es un acoplamiento unidireccional. Este tipo de configuración es conocida como maestro-esclavo. Un típico ejemplo es la aplicación a comunicaciones seguras.
- *Acoplamiento bidireccional.*  
Aquí ambos subsistemas son acoplados con otro, o cuando los dos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro.  
Esta situación se da en láseres con retroalimentación.

### 1.2 Tipos de estados sincronizados.

- ( CS ) complete synchronization .  
La sincronización completa fue el primer tipo descubierto. Consiste en una perfecta unión de las trayectorias caóticas de dos sistemas conseguidos por medio de una señal de acoplamiento.  
Con este mecanismo se demuestra que dos sistemas caóticos son acoplados unidireccionalmente sólo si todos los exponentes de Lyapunov del subsistema a sincronizar son negativos.

- ( GS ) generalized synchronization .  
En la sincronización generalizada se usan sistemas completamente diferentes y se asocia la salida de uno de ellos como una función dada de la entrada del otro.
- (PS) phase synchronization .  
La sincronización de fase se utiliza para sistemas de osciladores no idénticos o sistemas rotatorios, que pueden alcanzar un régimen intermedio donde se produce una unión de las fases, mientras la correlación entre las amplitudes permanece débil (amplitudes descorrelacionadas, caóticas).
- (LS) lag synchronization.  
La sincronización de retardo es un paso entre la sincronización de fase y la completa. La cuestión radica en que existe un límite asintótico entre el tiempo  $t$ , de salida de un sistema, y la salida del otro  $\tau_{lag}$  . esto hace que las fases y las amplitudes vayan unidas, pero con la presencia de un tiempo de retardo.
- (ILS) intermittent lag synchronization.  
En la sincronización de retardo intermitente, los sistemas la mayor parte del tiempo verifican la sincronización de fase, pero existen estallidos intermitentes de comportamientos no sincronizados, debido a que la trayectoria pasa por una región del atractor donde el exponente local de Lyapunov se acorta en alguna dirección y se vuelve positivo.
- (IPS) imperfect phase synchronization .  
La sincronización de fase imperfecta ocurre cuando estando fuera del régimen de sincronización de fase (PS), las fases se ajustan.
- (AS) almost synchronization.  
La “casi” sincronización es debida a la existencia del límite asintótico entre un subconjunto de variables de un sistema y el correspondiente subconjunto de variables del otro sistema.

Se pueden dar transiciones de unos tipos de sincronización a otros imponiendo determinadas circunstancias. Así, por ejemplo, para que se produzcan transiciones entre PS, LS y CS, se incrementa la fuerza de acoplamiento.

## 2. Sincronización de sistemas idénticos.

### 2.1 Sincronización completa.

Este estado de sincronización se obtiene por medio de los siguientes métodos:

- Pecora y Carroll (PC).
- Active-passive decomposition (APD).

Además existen otros métodos, que sólo mencionaré, como la “retroalimentación negativa”, el “conductor esporádico”, por “acoplamiento difusivo” y otros métodos híbridos.

### 2.2 Método Pecora y Carroll (PC).

Hasta ahora la idea de conducir un sistema no lineal con señales periódicas era un tema frecuente en dinámica no lineal. Ahora la idea revolucionaria que se va a tratar en este trabajo es la de usar señales caóticas en la conducción de sistemas no lineales.

La principal idea radica en usar una señal caótica para acoplar un sistema no lineal con otro, de modo que, el comportamiento del segundo sistema, al que llamaremos sistema *response* o respuesta, dependa del comportamiento del primer sistema, al que llamaremos sistema *driver* o conductor, mientras que el del primero no se vea influenciado por el del segundo.

Ambos sistemas pueden ser combinados dentro de las componentes dinámicas de un sistema, en el cual el subsistema respuesta dependa de las variables del subsistema conductor, pero lo contrario no suceda.

Entonces, descomponemos el sistema en tres subsistemas, dos de los cuales formen parte del conductor, donde a su vez uno de ellos intervendrá en el sistema respuesta y el otro no, y el otro sea el subsistema respuesta. Así si la dimensión del sistema es  $n$  una situación general vendría dada por:

- Un vector  $\mathbf{v}$  ( $m$ -dimensional) que representa las variables del conductor que son usadas en el sistema respuesta.
- Un vector  $\mathbf{u}$  ( $k$ -dimensional) que representa las variables del conductor que no son usadas en el sistema respuesta.
- Un vector  $\mathbf{w}$  ( $l$ -dimensional) que representa el sistema respuesta.

Donde se cumple que  $n = m + k + l$ . Entonces, sea el sistema caótico cuya evolución temporal viene dada por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tag{2.1}$$

Donde  $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  es un vector  $n$ -dimensional.

El método consiste en descomponer el sistema en un subsistema, *driver*, y otro subsistema que llamaremos *response*:

$$\begin{array}{l} \dot{v} = f(v, u) \\ \dot{u} = g(v, u) \\ \dot{w} = h(v, w) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} driver \\ \\ response \end{array} \quad (2.2)$$

donde  $u = \{u_1; u_2; \dots; u_m\}$ ,  $v = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$  y  $w = \{w_1; w_2; \dots; w_l\}$ .

El primer subsistema de la ec. (2.2) define el sistema conductor (*driver*), mientras que el segundo representa el sistema respuesta (*response*), el cual sigue la trayectoria del *driver* por medio de la señal  $v$ .

En este esquema la sincronización completa viene definida como la igualdad entre las trayectorias del sistema respuesta  $w$  y una réplica  $w'$  del sistema  $\dot{w}' = h(v, w')$  para la misma señal caótica  $v(t)$ , donde  $h$  tiene exponentes de Lyapunov negativos (como se justificará a continuación).

La existencia de sincronización completa (CS) implica que el sistema respuesta es asintóticamente estable, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , siendo  $e(t) = \|w - w'\|$  el *error de sincronización*. En otras palabras, el sistema respuesta *olvida* sus condiciones iniciales, aunque evoluciona en un atractor caótico.

Una vez dividido el sistema inicial, hay que decir como conseguir un sistema conductor y las condiciones que se tienen que cumplir para que la respuesta sea estable.

#### Estabilidad del sistema respuesta.

La estabilidad del sistema respuesta viene dada porque dicho subsistema tenga todos los exponentes de Lyapunov negativos. Esto no se demostrará puesto que para el tema a tratar la demostración no es significativa, basta tener en cuenta la condición. (Para ver la demostración véase referencia [2].)

#### Características del conductor: conductor homogéneo.

Sólo se tratará el caso especial en el que:

- $k = l$
- $f = h$

al que llamaremos conductor homogéneo, porque la respuesta es como la de la parte del conductor cuyas variables no intervienen en la respuesta.

Para la construcción de un sistema conductor de este tipo se comienza por dividir el sistema en dos  $(v, u)$ . Entonces, duplico, de estos dos, aquel que no es usado como conductor ( $u$ ), y lo llamo repuesta ( $w$ ).

La división del sistema conductor viene determinada por los exponentes de Lyapunov de los subsistemas. Siendo sólo posibles aquellos sistemas conductores que den como sistema respuesta un sistema con todos sus exponentes de Lyapunov negativos, como se ha dicho anteriormente por razones de estabilidad.

Esta condición puede ser satisfecha si  $v$  es la señal sincronizadora. Sin embargo, no todas las señales conducen en la dirección del estado sincronizado.

Tabla 2.1 Condición de los exponentes de Lyapunov para los distintos elecciones de conductor-respuesta para un sistema de Lorentz.

System	Drive	Response	Lyapunov exponents
Lorenz $\sigma = 16, b = 4, r = 45.92$	$x$	$(y, z)$	$(-2.5, -2.5)$
	$y$	$(x, z)$	$(-3.95, -16.0)$
	$z$	$(x, y)$	$(+7.89 \times 10^{-3}, -17.0)$

En la Tabla 2.1, se puede ver que solo dos, de los tres posibles, subsistemas conductor-respuesta nos dan una sincronización completa (PS), llamados  $(x, z)$  conducidos por  $y$  y  $(y, z)$  conducidos por  $x$ . La tercera elección,  $(x, y)$  conducido por  $z$ , puede llegar a dar una sincronización completa inestable.

Un buen ejemplo ilustrativo de este método es construir el método *PC* para un sistema Lorenz, donde el sistema respuesta viene dado por el subespacio que contiene las variables  $(y, z)$  conducidos por  $x$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= -x z + r x - y \\ \dot{z} &= x y - b z \end{aligned} \right\} \text{driver} \\
 \left. \begin{aligned} \dot{y}' &= -x z' + r x - y' \\ \dot{z}' &= x y' - b z' \end{aligned} \right\} \text{response}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

también es posible, por lo que se ha dicho anteriormente junto con la tabla 2.1.,  $(x, z)$  conducidos por  $y$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= -x z + r x - y \\ \dot{z} &= x y - b z \end{aligned} \right\} \text{driver} \\
 \left. \begin{aligned} \dot{x}' &= \sigma (y - x') \\ \dot{z}' &= x y' - b z' \end{aligned} \right\} \text{response}
 \end{aligned} \tag{2.3.b}$$

Donde tomando los parámetros adecuados, si  $\sigma = 16$ ,  $r = 45.92$  y  $b = 4$ , el sistema de la ec. (2.3) nos da una dinámica caótica.

Así pues, representando la ec. (2.3) se observa la sincronización completa de este sistema, como se muestra en la Fig. 2.1.

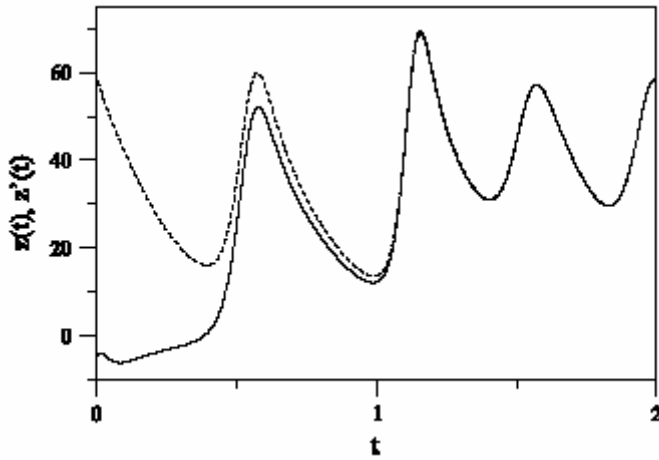


Fig. 2.1 Sincronización completa del sistema dado por la ec. (2.3), la línea discontinua representa  $z$ , la línea sólida representa  $z'$ , ambas en función del tiempo.

Esto también se puede observar en la Fig.2.2y 2.3, dónde se ve cómo rápidamente el sistema respuesta  $(x,z)$  conducidos por  $y$ , e  $(y,z)$  conducidos por  $x$  siguen la misma trayectoria al cabo de un tiempo respectivamente.

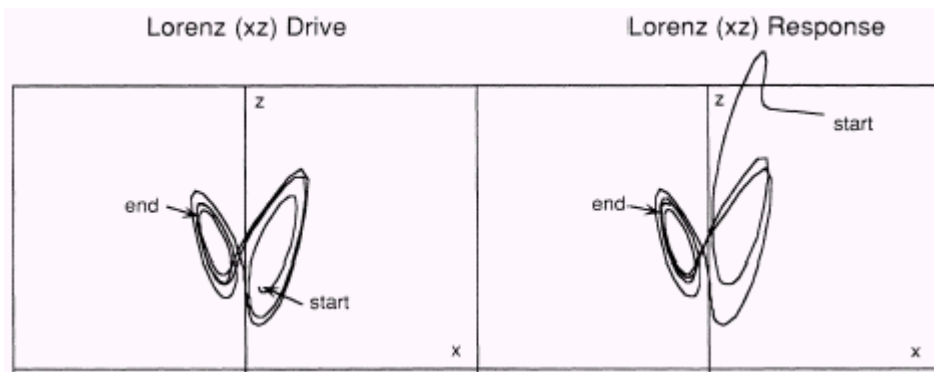


Fig.2.2. Trayectorias de los subsistemas de Lorenz  $(x,z)$  conducidos por  $y$ .

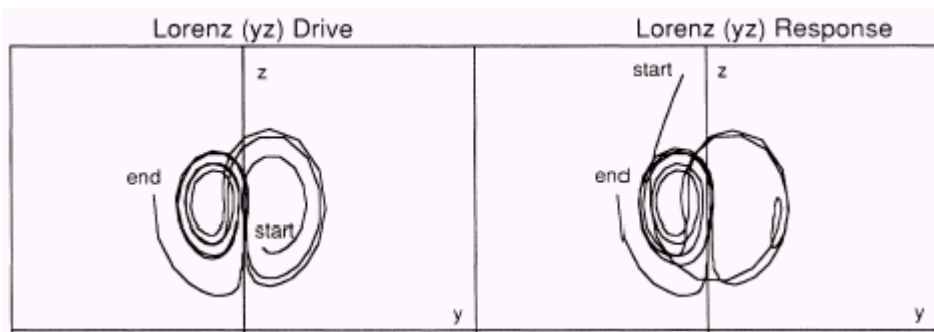


Fig.2.3. Trayectorias de los subsistemas de Lorenz  $(y,z)$  conducidos por  $x$ .

### 2.3 Método *Active-passive decomposition (APD)*.

Este método nos proporciona un esquema conductor-respuesta mucho más general que el *PC* para la sincronización de sistemas caóticos idénticos.

El método *APD* trata un sistema caótico autónomo y lo rescribe como uno no autónomo

$$\dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{s}(t)) \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{s}(t)$  es la señal conductora  $\mathbf{s} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  o  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ .

Al igual que antes, la condición para que se de sincronización completa es que se de la identidad entre el sistema de la ec. (2.4) y su réplica (el sistema respuesta). Ambos sistemas son conducidos por la misma señal  $\mathbf{s}(t)$ .

Para ilustrar este método se construye el método *APD* para un sistema *Lorenz*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + s(t), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - 2.666z \end{aligned} \quad (2.5)$$

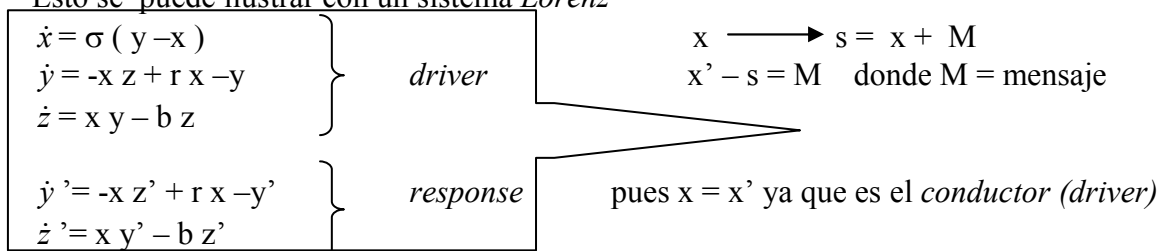
conducido por  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 10y$ . El uso de una función de Lyapunov<sup>1</sup> demuestra que el sistema respuesta sincroniza con su copia para todos los tipos de señal conductora  $\mathbf{s}(t)$ .

Mientras el sistema *PC* permite dar a un sistema caótico sólo un número finito de descomposiciones posibles para producir sincronización, ahora el método *APD* permite elegir la señal  $\mathbf{s}(t)$  para construirlo, esto le hace ser mas poderoso y general. Esta cualidad puede ser útil en la aplicación a comunicaciones.

Por ejemplo, sean dos sistemas, uno emisor y el otro receptor, los cuales tienen un comportamiento caótico, pero sincronizados entre ellos a través de una señal conductora. El emisor puede añadir un mensaje al *conductor* (o señal conductora), esto enmascara la información a una posible tercera persona que quisiera interceptar el mensaje.

El receptor puede extraer el mensaje usando el error de sincronización entre el *conductor* y la nueva señal enviada (señal + mensaje).

Esto se puede ilustrar con un sistema *Lorenz*



<sup>1</sup> Si para un sistema acoplado uno puede encontrar una función de Lyapunov, entonces la CS es globalmente estable.

## 2.4 Sincronización completa mediante acoplamiento bidireccional.

Un esquema de acoplamiento bidireccional entre sistemas caóticos idénticos es equivalente a introducir una disipación en la dinámica:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \hat{\mathbf{C}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T.\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde  $\hat{\mathbf{C}}$  es la *matriz*  $n \times n$  cuyos coeficientes rigen el acoplamiento disipativo. T representa la traspuesta.

Cuando se incrementa la fuerza de acoplamiento (coeficientes de  $\hat{\mathbf{C}}$ ), el sistema (2.6) presenta una transición a un estado de sincronización completa a partir de un valor crítico de acoplamiento que depende de la matriz de acoplamiento.

En particular, cuando  $\hat{\mathbf{C}} = c \hat{\mathbf{I}}$ , ambos sistemas sincronizan completamente para  $c > 1/2 \lambda_L$ , siendo  $\lambda_L$  el mayor de los exponentes de Lyapunov de los sistemas caóticos desacoplados. Esto se puede ver en la Fig. 2.2.

Esto se puede ilustrar con dos sistemas *Lorenz* acoplados bidireccionalmente

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + c(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= (r - z_{1,2})x_{1,2} - y_{1,2} + c(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2} - bz_{1,2} + c(z_{2,1} - z_{1,2}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

los parámetros elegidos son  $\sigma = 16.0$ ,  $r = 40.0$  y  $b = 4.0$  con el propósito de producir sistemas dinámicos caóticos desacoplados. Para esta elección, los exponentes de Lyapunov del sistema son  $\lambda_1 = 1.37$ ,  $\lambda_2 = 0.0$  y  $\lambda_3 = -22.37$ .

En la Fig. 2.2 se representa el valor medio del error de la sincronización  $e$ , definido como la distancia promedio a la sincronización, y la distancia máxima  $e_{\max}$  en función de la fuerza de acoplamiento  $c$ , para el sistema dado por la ec. (2.7).

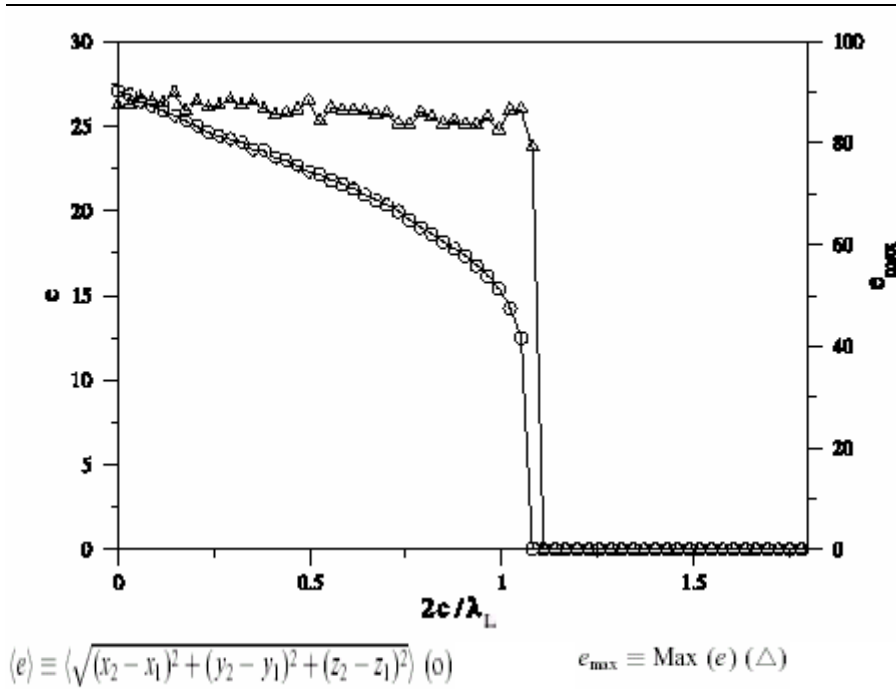


Fig. 2.2. Error medio de sincronización y error máximo frente a la fuerza de acoplamiento, para el sistema dado por la ec. (2.7).

Este esquema de sincronización (ec. (2.6)) es efectivo sincronizando completamente variables de sistemas caóticos, debido a la disipación adicional introducida, siempre que no sigan las mismas trayectorias  $x_1(t) \neq x_2(t)$ , siendo  $x_1$  y  $x_2$  los vectores estado del sistema acoplado de la ec. (2.7).

## 2. Sincronización de sistemas no idénticos

### 3.1. Sincronización de fase de sistemas caóticos.

#### 3.1.1. Sincronización de osciladores periódicos.

La noción clásica de sincronización de dos osciladores periódicos acoplados, normalmente viene definida por la unión de las fases  $\phi_{1,2}$  con una ratio  $n:m$ , esto es

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{cte.}$$

Debido a la sincronización de las fases las frecuencias  $\omega_i = \dot{\phi}_i$  también están *unidas*<sup>2</sup>, es decir que cumplen

$$n\omega_1 - m\omega_2 = 0 \quad \text{con } n, m \text{ enteros}$$

mientras que las amplitudes pueden ser bastante diferentes, así, para sincronización en fase de osciladores periódicos no idénticos basta con que estén débilmente acoplados.

Por tanto, la sincronización de fase de osciladores periódicos débilmente acoplados puede ser descrita por la dinámica de la diferencia de fase  $\theta = n\phi_1 - m\phi_2$ , esto es

<sup>2</sup> Traducción libre de locked: unido, trabado

$$\dot{\theta} = \Delta\omega - C \sin\theta \quad (3.1)$$

donde  $\Delta\omega = m\omega_1^0 - m\omega_2^0$  es la diferencia entre las frecuencias naturales de los osciladores, y  $C$  es la fuerza de acoplamiento.

La condición para que se consiga la sincronización es cuando se satisface:

$$\left| \frac{\Delta\omega}{C} \right| \leq 1 \quad (3.2)$$

lo cual nos da una región de sincronización, llamada lengua de Arnold.

En esta región, el sistema es estable en el punto fijo  $\theta_0 = \arcsin(\Delta\omega / C)$  el cual corresponde a un mínimo del potencial “tabla de lavar”  $V(\theta) = -\theta \Delta\omega - C \cos\theta$ .

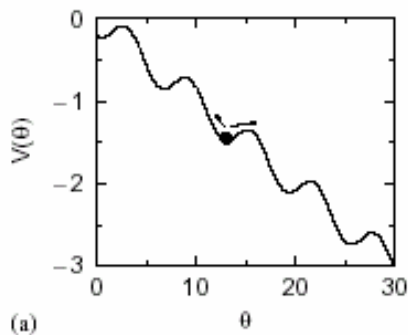


Fig. 3.1. Representación del potencial “tabla de lavar”  $V(\theta) = -\theta \Delta\omega - C \cos\theta$  para el sistema dado por la ec. (3.1).

Como ejemplo ilustrativo tomamos el oscilador de Rössler:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), & \dot{x} &= -\omega y - z + E \sin(\Omega_e t), \\ \dot{y} &= x + ay, & \dot{y} &= \omega x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c). & \dot{z} &= f + z(x - c) \end{aligned} \quad (3.4)$$

con los parámetros  $\omega = 0.97$ ,  $f = 0.2$  y  $c = 10$ . Cuando imponemos  $a = 0.04$ , este oscilador exhibe un movimiento periódico con una frecuencia  $\Omega = 0.981$ .

En la Fig.3.2 se muestra que este movimiento periódico es *unido* con una ratio  $n:m=1:1$  con la señal externa periódica de amplitud  $E = 0.4$  y  $\Omega_e = 1.0$ .

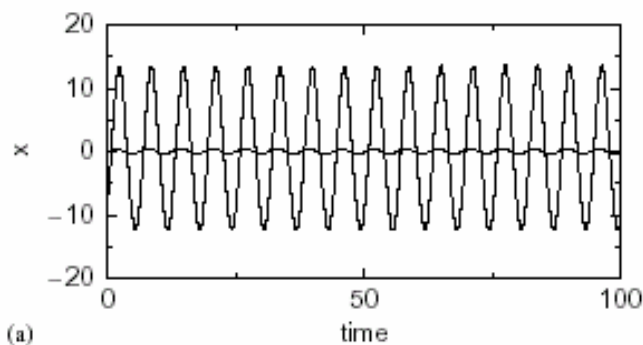


Fig. 3.2. Sincronización de la oscilación periódica con una señal conductora periódica débil.

### 3.1.2. Sincronización de fase de osciladores caóticos acoplados.

En este apartado se va a demostrar que para dos osciladores caóticos no idénticos, es posible sincronizarles en fase debido al acoplamiento. Esto se demuestra para dos osciladores caóticos Rössler:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + C(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= f + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{3.5}$$

con un pequeño parámetro diferenciador  $\omega_{1,2} = 0.97 \pm \Delta \omega$ . Los otros parámetros son los mismos que para el caso anterior de dos osciladores.

Debido a este parámetro ambos osciladores tendrán distintas frecuencias en promedio.

Como muestra la Fig.3.3.(a), para  $\Delta \omega = 0.02$ , hay una transición de un régimen no sincronizado, donde la diferencia de fases crece casi linealmente con el tiempo,

$\phi_1 - \phi_2 \approx \Delta \Omega t$ , a un estado sincronizado, donde la diferencia de fase no crece con el tiempo,  $|\phi_1 - \phi_2| < \text{cte}$  y la diferencia  $\Delta \Omega = \Omega_1 - \Omega_2$  entre ambas frecuencias medias  $\Omega_i = \langle \dot{\phi}_i \rangle$  desaparece, es decir,  $\Delta \Omega = 0$ .

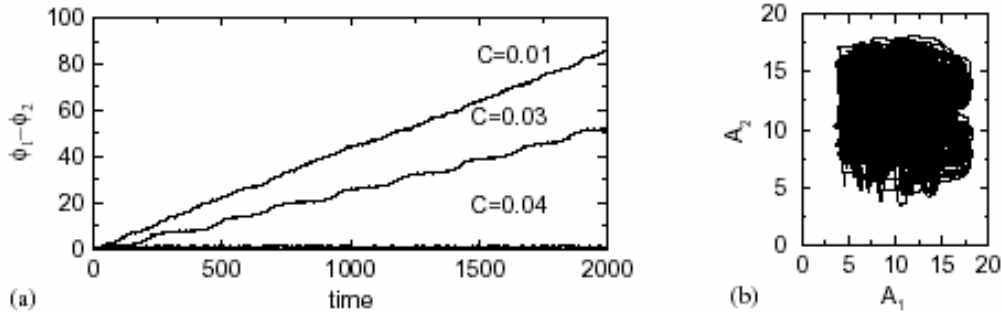


Fig.3.3. Ilustración de la sincronización de fase de dos osciladores no idénticos caóticos Rössler dados por la ec. (3.5). (a) Sucesión de tiempo de la diferencia de fase para diferentes fuerzas de acoplamiento. Cuando  $C > 0.036$  las fases están cerca de la sincronización perfecta. (b) Amplitud  $A_1$  vs.  $A_2$  con las fases sincronizadas, caso  $C = 0.04$ . Aunque las fases están *unidas*, las amplitudes permanecen caóticas y escasamente descorrelacionadas.

Es importante hacer notar que aunque las fases de los osciladores estén *unidas*, las amplitudes están no correlacionadas, como se puede ver en la Fig.3.3.(b).

Este carácter dual, de orden en las fases y complejidad en las amplitudes, hace que la sincronización sea factible y aplicable a aplicaciones experimentales y a sistemas naturales.

### 3.2 Sincronización de fase imperfecta.

El estudio de este caso se realiza con un sistema *Lorenz* conducido periódicamente,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) , \\ \dot{y} &= rx - y - xz , \\ \dot{z} &= xy - 2.667z + E \cos(\Omega t) . \end{aligned} \tag{3.6}$$

el sistema presenta bifurcaciones cuando el parámetro  $r$  varía.

Para  $r = 210$ , aparecen oscilaciones caóticas de doble periodicidad, y el sistema puede sincronizarse perfectamente con una señal conductora periódica de frecuencia promedio  $\Omega = 24.92$ . Como puede verse en la Fig. 3.4. aparece un *plateau* (meseta) para la diferencia de las frecuencias, que es horizontal y nulo,  $\Omega - \omega = 0$ .

El comportamiento para  $r = 28$ , es totalmente distinto, pues aparece un *plateau* que ni es horizontal ni cero. Por tanto, en este caso la sincronización de fase es imperfecta.

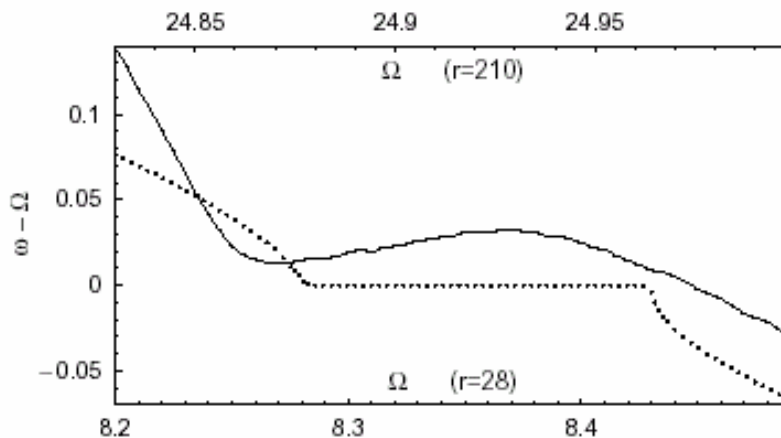


Fig.3.4. Perfecta e imperfecta sincronización de fase para sistemas periódicamente forzados de *Lorenz*, dados por la ec. (3.6); línea sólida:  $r = 28$ ,  $E = 6$ ; línea a trazos:  $r = 210$ ,  $E = 3$ .

### 3.3. Sincronización de retardo de sistemas caóticos.

Una vez demostrado que para osciladores caóticos acoplados débilmente, las fases pueden ser *unidas* mientras que las amplitudes permanecen no correlacionadas. Qué ocurre cuando la fuerza de acoplamiento llega a ser muy grande? Uno podría pensar que un acoplamiento fuerte establezca una relación entre las amplitudes, pero lo que se demuestra es que se da un régimen de sincronización de retardo, donde los estados de los dos osciladores son casi idénticos, pero un sistema tiene un tiempo de retardo respecto al otro.

Para ver cómo se establece el tiempo de retardo, nos fijamos en la dinámica de las amplitudes, que la obtenemos a través de las ec. (3.4) con unos cambios de coordenadas, consiguiendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\dot{A}_{1,2} &= \frac{a}{2} A_{1,2} - z_{1,2} \cos(\omega_0 t + \theta_{1,2}) + \frac{C}{2} (A_{2,1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - A_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= f - cz_{1,2} + A_{1,2} z_{1,2} \cos(\omega_0 t + \theta_{1,2}),\end{aligned}\quad (3.7)$$

estas representan dos osciladores acoplados conducidos periódicamente. La señal conductora  $\cos(\omega_0 t + \theta_{1,2})$  es la misma para los dos sistemas, sin embargo, no son idénticos. Si los dos osciladores son idénticos, entonces  $\theta_1 - \theta_2 = 0$  y la sincronización completa podría ser observada cuando  $C > C_{CS} = 0.095$ .  $C_{CS}$  es el umbral de acoplamiento donde uno de los dos exponentes de Lyapunov positivos, pasan a ser cero llegando a ser negativos.

Un pequeño parámetro diferenciador  $\Delta\omega = 0.02$  cambia la transición al punto  $C_{CS} = 0.11$ , y lo que es más importante hace que la diferencia de fases  $\theta_1 - \theta_2$  sea distinta de cero.

Para  $C > C_{CS}$ , los estados del sistema pueden permanecer casi idénticos pero con un tiempo de retardo  $\tau_0 = (\theta_1 - \theta_2) / \omega_0$ , es decir

$$x_2(t + \tau_0) \approx x_1(t), \quad y_2(t + \tau_0) \approx y_1(t), \quad z_2(t + \tau_0) \approx z_1(t), \quad (3.8)$$

que es a lo que llamamos sincronización de retardo.

Para caracterizar la sincronización de retardo, se introduce una función  $S(\tau)$

$$S^2(\tau) = \frac{\langle (x_2(t + \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}} \quad (3.9)$$

y se busca el mínimo  $\sigma = \min_{\tau} S(\tau) = S(\tau = \tau_0)$ .

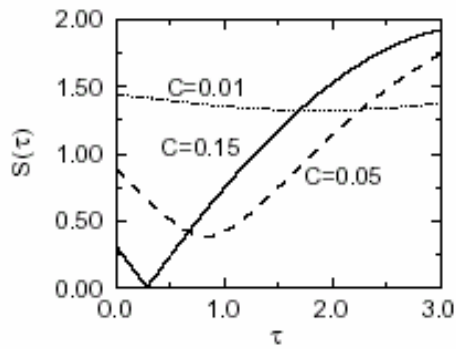


Fig.3.5. Función  $S(\tau)$  (ec. (3.9)) obtenida para dos osciladores acoplados Rössler para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento  $C$ . En el régimen de sincronización de fase (e.g.  $C = 0.05$ ), la curva tiene un mínimo  $\sigma \neq 0$ . La sincronización de retardo ocurre cuando  $\sigma$  es efectivamente cero (e.g.  $C = 0.15$ ).

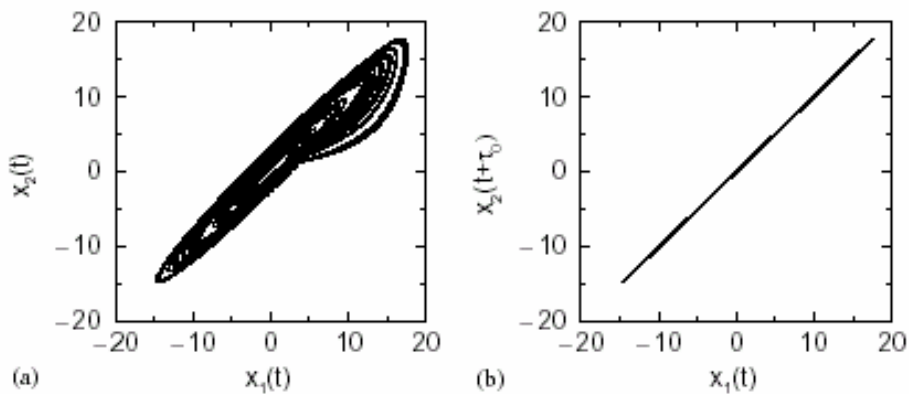


Fig.3.6. Con el mismo sistema que en la Fig.3.5. Ilustración de la sincronización de retardo a  $C = 0.20$ .  
 (a) Representación de  $x_1(t)$  vs.  $x_2(t)$ , muestra que el sistema no está completamente sincronizado.  
 (b) Representación de  $x_1(t)$  vs.  $x_2(t + \tau_0)$ , con  $\tau_0 = 0.21$ , la línea recta muestra la sincronización de retardo.

Un típico comportamiento de  $S$  para los osciladores acoplados Rössler se representa en la Fig.3.5. para diferentes valores de la fuerza de acoplamiento.

### 3.4 Sincronización de retardo intermitente.

Este tipo de fenómeno ocurre entre *PS* y *LS*.

Se va a demostrar que dos osciladores caóticos no idénticos acoplados sufren una transición de *fase* a *retardo* y entonces la sincronización casi completa sucede cuando se incrementa la fuerza de acoplamiento.

Se ha demostrado<sup>3</sup> la conexión entre la transición de exponentes de Lyapunov y las etapas de sincronización para sistemas Rössler acoplados. Estos resultados se presentan en la Fig.3.7.

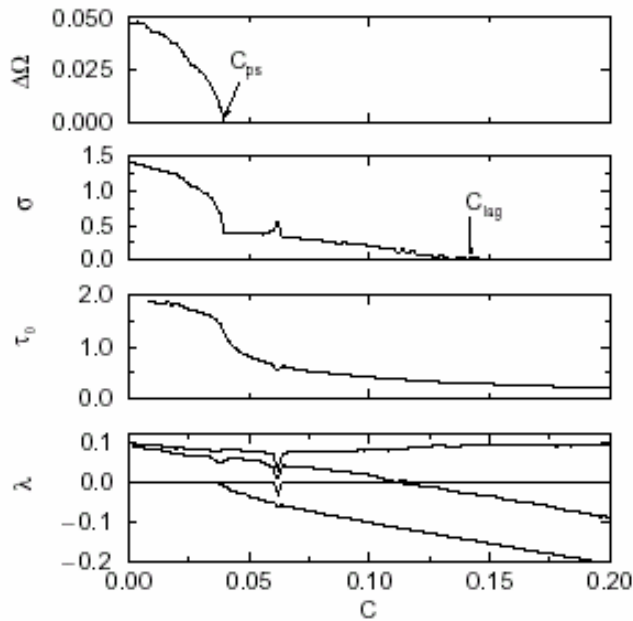


Fig.3.7. La diferencia de frecuencias  $\Delta\Omega$ ,  $\sigma$  el mínimo  $s$  de la función  $S(\tau)$ , el tiempo de retardo  $\tau_0$  y los cuatro exponentes de Lyapunov mas grandes  $\lambda$  de dos osciladores acoplados Rössler vs. a la fuerza de acoplamiento  $C$ . El parámetro diferenciador  $\Delta\omega = 0.02$ .

La Fig.3.7. muestra como varia la diferencia entre las frecuencias medias  $\Delta\Omega$ , los valores de los exponentes de Lyapunov,  $\sigma$  el mínimo  $s$  de la función  $S(\tau)$  y el tiempo de retardo  $\tau_0$ , frente a la fuerza de acoplamiento.

Como se puede observar un poco antes de la transición *PS*,  $C_{PS} = 0.036$ , uno de los exponentes de Lyapunov pasa por cero llegando a ser negativo, mientras que en la transición a la *sincronización de retardo*,  $C_{lag} = 0.14$ , el exponente pasa por cero significativamente antes, en  $C_{CS} = 0.11$ .

La región  $0.11 < C < 0.14$  donde  $s$  toma valores pequeños, pero no es exactamente cero, tiene un comportamiento de *sincronización de retardo intermitente*, donde la sincronización de retardo es interrumpida por intermitentes estallidos de un amplio error de sincronización  $x_1(t) - x_2(t + \tau_0)$ , como puede verse en Fig.3.8.y 3.9.

<sup>3</sup> M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 4193.

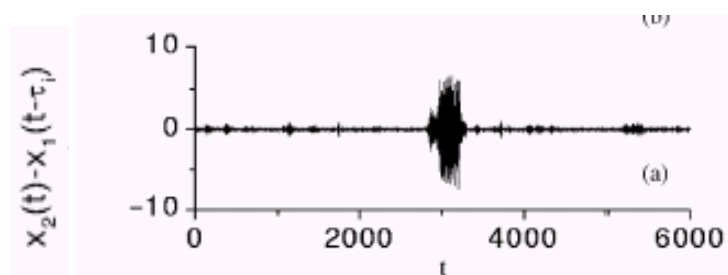


Fig.3.8. Sincronización de retardo intermitente para  $C = 0.13$ . (a)  $n = 0$ , (b)  $n = 1$ , (c)  $n = 2$ , (d)  $n = 3$ .

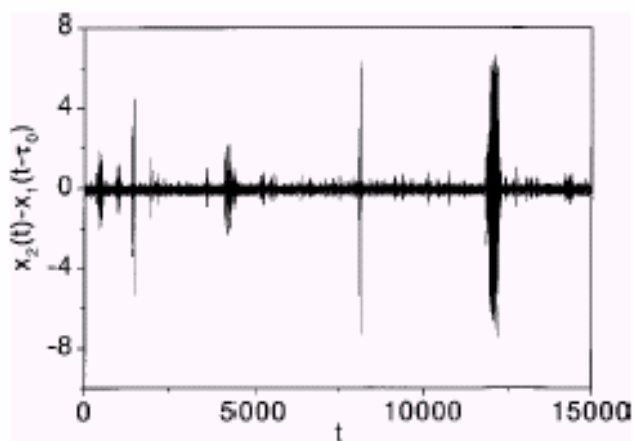


Fig.3.9. Sucesión de tiempo para  $x_1(t) - x_2(t + \tau_0)$ , en un régimen de *sincronización de retardo intermitente*.  $C = 0.13$ ,  $\tau_0 = 0.32$ .

### 3.5 Sincronización generalizada.

En los apartados anteriores se ha visto la sincronización para osciladores caóticos no idénticos acoplados. En general, cuando en estos existe una diferencia entre los sistemas acoplados, no se espera que tengan un (cuenca de atracción)trivial en el espacio de fases que atraiga a las trayectorias, y por tanto no está claro que a primera vista que sistemas caóticos no idénticos puedan sincronizar.

Así, las dos cuestiones a plantear son:

- *Generalizar* el concepto de sincronización para incluir la no identidad entre los sistemas acoplados.
- Diseñar algún test para detectarlo.

A esto lo llamaremos *sincronización generalizada*.

Con el fin de definir la *sincronización generalizada* ( GS ) para un sistema acoplado unidireccional , se considera el siguiente sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{h}_\mu(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector n-dimensional del *conductor* e  $\mathbf{y}$  es el vector m-dimensional del *respuesta*. El acoplamiento entre conductor y respuesta viene dado por  $\mathbf{h}_\mu(\mathbf{x})$ , donde se considera la dependencia de esta función con el parámetro  $\mu$ .

Cuando  $\mu = 0$ , el sistema *respuesta* evoluciona independientemente del *conductor*, y consideramos que ambos sistemas son caóticos.

Cuando  $\mu \neq 0$ , las trayectorias caóticas de los dos sistemas se dice que están sincronizadas en sentido generalizado si existe una transformación  $\psi : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ , que produce la convergencia del sistema respuesta al sistema conductor

$$\mathbf{y}(t) = \psi(\mathbf{x}(t)),$$

siendo independiente de las condiciones iniciales el cuenca atractiva de sincronización

$$M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})\},$$

Para ilustrarlo consideremos un ejemplo. Sean dos sistemas acoplados *Rössler* con una configuración *conductor-respuesta*

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1) \\
 \dot{y}_1 &= x_1 + ay_1 \\
 \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - \mu)
 \end{aligned} \right\} \text{driver ,}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= -(y_2 + z_2) + \dots + c(x_1 - x_2) \\
 \dot{y}_2 &= x_2 + ay_2 \\
 \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - \mu)
 \end{aligned} \right\} \text{response ,}$$
(3.11)

donde  $a = 0.2$ ,  $f = 0.2$  y  $\mu = 5.7$ .

Para  $c = 0.1$  los sistemas acoplados están en un estado no sincronizado, mientras que para  $c = 0.2$  se encuentran en estado *completamente sincronizado (CS)*. Esto se muestra en la Fig.3.10(a) y (b), donde se ha representado  $y_1(t)$  vs.  $y_2(t)$ . Aquí, el comportamiento de estado *completamente sincronizado (CS)* viene dado por una acentuada línea recta  $y_2 = y_1$  para  $c = 0.2$ .

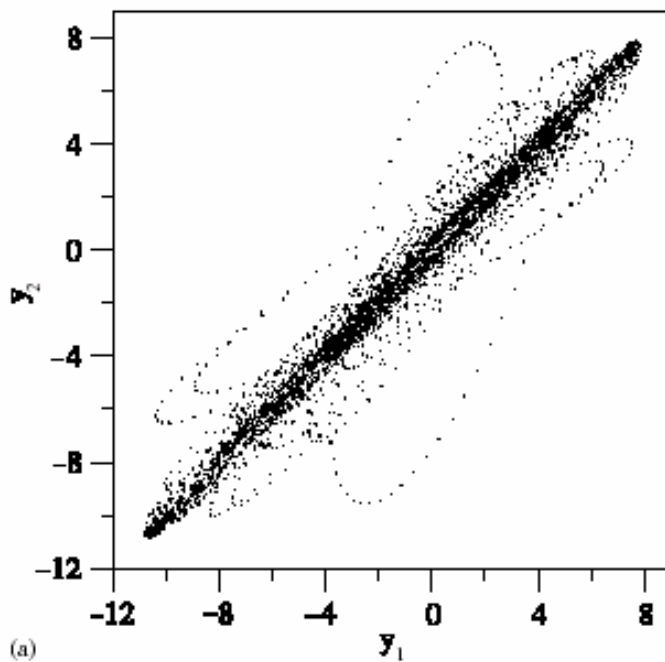


Fig. 3.10.(a).Proyección del plano ( $y_2$ ,  $y_1$ ) del atractor caótico generado por (3.11) para una fuerza de acoplamiento  $c = 0.1$ .

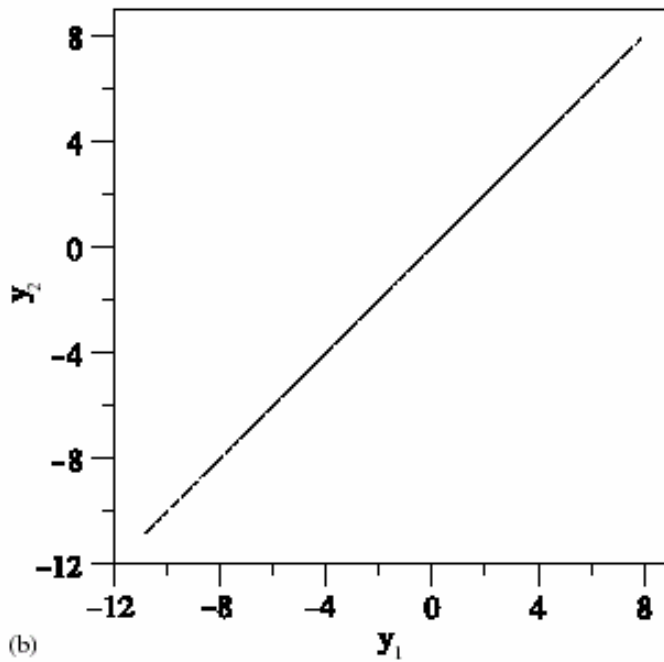


Fig. 3.10.(b). Proyección del plano  $(y_2, y_1)$  del atractor caótico generado por (3.11) para una fuerza de acoplamiento  $c = 0.2$ .

Es posible construir un sistema respuesta que exhiba *sincronización generalizada* con el conductor, haciendo una transformación no lineal en las variables *respuesta*  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Para este fin, crear un nuevo sistema respuesta, se realiza la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= x_2(t) , \\
 y_3(t) &= y_2(t) + \beta z_3(t) + \gamma z_3(t)^2 , \\
 z_3(t) &= z_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

con  $\beta = 0.4$  y  $\gamma = -0.08$ .

El nuevo sistema respuesta debería ser sincronizado con el conductor para  $c = 0.2$ , porque se ha obtenido aplicando un cambio suave de coordenadas. Sin embargo en este caso, el movimiento no ocurre en una simple línea recta como lo hacía en Fig.3.7.(b).

Ahora el objeto que atrae a las trayectorias es más complejo, cómo puede verse en la Fig.3.8., pudiendo parecer a primera vista como una señal de un estado no sincronizado.

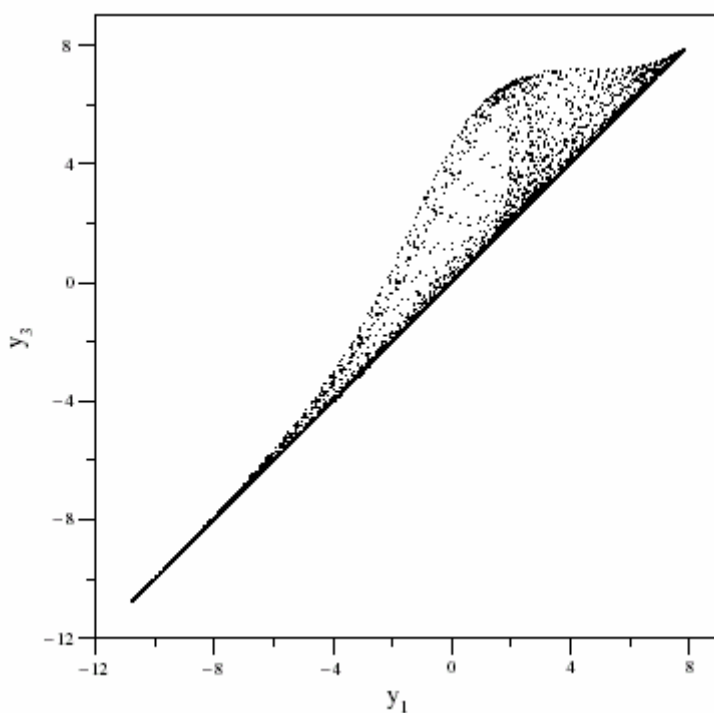


Fig.3.11. Proyección del plano  $(y_3, y_1)$  del atractor caótico generado por (3.11) con la transformación de coordenadas dada por (3.12) para una fuerza de acoplamiento  $c = 0.2$ .

Así pues, para este ejemplo la *sincronización generalizada* puede tener lugar en un atractor con estructura compleja.

Por tanto, distinguir cuando dos variables están sincronizadas en sentido *generalizado* es más complicado que detectar *sincronización completa*.

En conclusión, la *sincronización generalizada* consiste en la convergencia del sistema respuesta al sistema conductor a través de una transformación distinta de la identidad.

### 3. Experimentos de sincronización de caos.

#### 4.1. Fenómenos de sincronización en experimentos de laboratorio.

Fenómenos de *sincronización completa (CS)* y *generalizada (GS)* han sido demostrados en el laboratorio para circuitos eléctricos<sup>4</sup> y para láseres<sup>5</sup>.

Además estos fenómenos han sido largamente demostrados para intentar probar esquemas de comunicaciones seguras. Estos experimentos están conformados por osciladores de Chua modificados, láseres de semiconductor de emisión caótica en un tiempo de escala por debajo de los nanosegundos y otros sistemas a sincronizar.

#### 4.2 Fenómenos de sincronización en sistemas naturales.

Este tipo de fenómenos de sincronización han sido estudiados en, por ejemplo, la dinámica de un sistema cardiorrespiratorio humano<sup>6</sup>, en sistemas ecológicos<sup>7</sup>, y en la actividad de encefalogramas magnéticos de pacientes con Parkinson<sup>8</sup>.

### Referencias.

- [1] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 821.
- [2] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Phys. Rev. A 44 (1991) 2374.
- [3] J. Güemez, M.A. Matías, Phys. Rev. E 52 (1995) R2145.
- [4] W.L. Ditto, L. Pecora, Investigación y Ciencia, pag. 48, oct. 1993
- [5] S. Zhu, J. Fang, X. Luo, Eur. Phys. J. D 18, 123 – 128 (2002)
- [6] R. Roy, K.S. Thornburg, Phys. Rev. Lett. 72, 2009 (1994)
- [7] S. Boccaletti, J. Kurth, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, Physics Reports 366 (2002) 1 - 101
- [8] S. Boccaletti, D. L. Valladares, Phys. Rev. E 62 (Nov 2000) 5

---

<sup>4</sup> L.M. Pecora, T.L. Carroll, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 821.

L.M. Pecora, T.L. Carroll, Phys. Rev. A 44 (1991) 2374.

<sup>5</sup> G.D. Van Wiggeren, R. Roy, Science 279 (1998) 1198.

<sup>6</sup> C. Schafer, M.G. Rosenblum, J. Kurths, H.H. Abel, Nature 392 (1998) 239.

<sup>7</sup> B. Blasius, A. Huppert, L. Stone, Nature 399 (1999) 354.

<sup>8</sup> P. Tass, M.G. Rosenblum, M.G. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, H.J. Freund, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 3291.